

部分极化情况下 SINR 最优极化滤波器特性分析^{*}

杨运甫^{1,2**} 陶然¹ 王越¹

1. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081; 2. 解放军炮兵学院二系, 合肥 230031

摘要 在白噪声和部分极化散射源情况下, 使用矢量分析方法获得了信干噪比(SINR)等式的最优极化解, 证明了最优点的唯一性, 并分析了最优极化点的分布和最优极化滤波器的通带域. 所有最优极化点都位于极化球面上由共轭的信号极化点和交叉的干扰极化点所决定的一段大圆弧上. 最优极化滤波器的通带域为一个极化球冠, 最优点与极化球冠中心点并不重合, 有一定偏差, 但始终在球冠上. 另外还分别给出了最优极化弧所在的最优极化大圆方程和极化球冠的边圆方程, 并举例展示了最优极化弧、最优点及极化球冠的边圆随干扰强度变化的趋势.

关键词 部分极化 信干噪比 极化滤波 最优极化弧 极化球冠

极化滤波的基础是目标和干扰信号的极化特征有所区别, 它所讨论的是对混杂在干扰背景中有用信号的最佳接收问题, 在数学上归结为线性或非线性的最优化问题, 所以极化滤波的核心是最优极化理论. 最优极化的目的在于寻找雷达接收天线的最优极化状态, 使接收的信号功率最大或干扰功率最小.

对完全极化的信号, Giuli, Boerner 等研究了最优极化叉: 共极化零点、共极化最大点(交叉极化零点)和交叉极化最大点形成了一个极化叉. 这几个驻点都处在同一个大圆上^[1,2]. 对部分极化的信号, 很多作者致力于获得最优极化解. Deschamps 用极化球内的一点来描述部分极化波的极化状态(其半径为极化度)^[3]. Van Zyl 用 Lagrange 乘因子法获得了最优极化解, 但需要寻求六次高阶方程的根^[4]. Czyz 提出了两种消除部分极化杂波的方法: 相干法和非相干法^[5]. Boerner 获得了一些部分极化波的最优极化状态. McCormick 使用

了另外一种散射矩阵并得到了一些有用的结果^[6]. 在同时存在部分极化的信号和干扰时, Poelman 研究了多凹口逻辑极化对消器(MLP, multinotch logic product)及其应用^[7,8]. Gherardelli 提出了多凹口自适应极化对消器(MLP SAMP, multinotch polarization SAMP), 并与单凹口极化对消器(SAMP, singlenotch adaptive polarization canceller)和 MLP 进行了比较^[9].

当同时存在噪声、完全极化的信号和干扰时, Stapor 定义了信干噪比 SINR 等式, 并提出几种优化策略, 分析了其性能, 而且指出了该 SINR 等式的最优极化点位于一个圆上^[10]. 王雪松等导出了局部最优接收极化解^[11]. 文献[12]中提出了基于极化椭圆参数称为三步搜索比较法的数值求解方法.

当同时存在噪声、部分极化的信号和干扰时, 王雪松等借助于 Lagrange 乘因子法和非对称性, 将 SINR 等式的最优问题转化为求二次方程的根问

2006 04 24 收稿, 2006 08 12 收修修改稿

^{*} 国家自然科学基金重点项目资助(批准号: 60232010)

^{**} E mail: yangyunfu63@sina.com

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

题, 得到了两个被选解^[13], 他们还提出了 SINR 极化滤波器通带的概念——极化球冠, 利用滤波器通带分析方法得到了最优 SINR 极化滤波器参数的解析解^[14]. 徐振海用求偏导法得到了 SINR 等式的解析解^[15]. 王雪松等还以 SINR 极化滤波器为参照标准, 提出了极化滤波器性能的度量方法和评价指标, 并提出了极化滤波器的优选方案和判别条件^[16]. 本文则用另一种方法——矢量分析方法讨论了 SINR 等式的最优化求解过程, 并详细地描绘了最优极化弧和极化球冠, 得到了最优极化大圆方程和极化球冠的边圆方程.

1 SINR 等式的最优化求解

1.1 功率的极化描述

在极化雷达中, 根据后向对准规则, 接收天线处接收的信号功率为^[17]

$$P_s = \frac{1}{2} F J_r^T U_4 J_s \quad (1)$$

其中 F 为一与接收天线极化无关的因子, J_r 为接收天线极化的 Stokes 参数, $J_r^T = [1, g_{r1}, g_{r2}, g_{r3}] = [1, \mathbf{g}_r^T]$, $\mathbf{g}_r = [g_{r1}, g_{r2}, g_{r3}]$, T 表示转置, $\|\mathbf{g}_r\| = 1$. J_s 为接收天线处信号极化的 Stokes 参数, $J_s^T = [g_{s0}, g_{s1}, g_{s2}, g_{s3}] = g_{s0} [1, p_s \mathbf{g}_s^T]$, g_{s0} 为信号的功率, $p_s = \sqrt{g_{s1}^2 + g_{s2}^2 + g_{s3}^2} / g_{s0}$, p_s 为信号的极化度, \mathbf{g}_s 为信号极化矢量, 其端点为 s . $U_4 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1\}$ 为一对角矩阵, 其作用是改变 J_s 的最后一个分量的符号. 因而(1)式中的 $U_4 J_s$ 也可用一新的 Stokes 参数 $J_{\bar{s}}$ 来表示, 即

$$J_{\bar{s}} = U_4 J_s = [g_{s0}, g_{s1}, g_{s2}, -g_{s3}]^T = g_{s0} [1, p_s \mathbf{g}_{\bar{s}}^T]^T \quad (2)$$

其中点 \bar{s} 为信号的共轭矢量 $\mathbf{g}_{\bar{s}}$ 的端点, 也是点 s 的共轭点. 因此, 接收的信号功率为

$$P_s = \frac{1}{2} F J_r^T J_{\bar{s}} = \frac{1}{2} F (g_{s0} + g_{s1} g_{r1} + g_{s2} g_{r2} - g_{s3} g_{r3}) = \frac{1}{2} F g_{s0} (1 + p_s \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_{\bar{s}}) = \frac{1}{2} F g_{s0} (1 + p_s \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r) \quad (3)$$

类似地, 接收的干扰功率为

$$P_i = \frac{1}{2} F J_r^T J_{\bar{i}} = \frac{1}{2} F (g_{i0} + g_{i1} g_{r1} + g_{i2} g_{r2} - g_{i3} g_{r3}) = \frac{1}{2} F g_{i0} (1 + p_i \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_{\bar{i}}) = \frac{1}{2} F g_{i0} (1 + p_i \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r) \quad (4)$$

其中 $J_{\bar{i}} = U_4 J_i = [g_{i0}, g_{i1}, g_{i2}, -g_{i3}]^T = g_{i0} [1, p_i \mathbf{g}_{\bar{i}}^T]^T$, $p_i = \sqrt{g_{i1}^2 + g_{i2}^2 + g_{i3}^2} / g_{i0}$. g_{i0} 为干扰的功率, p_i 为干扰点 i 的极化度. 点 i 是干扰极化矢量 \mathbf{g}_i 的端点. $\mathbf{g}_{\bar{i}}$ 为干扰的共轭极化矢量, 点 \bar{i} 是 i 的共轭点.

1.2 SINR 等式及其最优解

假定噪声为平均功率 P_n 为 N_0 的白噪声, 则 SINR 为

$$\text{SINR} = \frac{P_s}{P_s + P_n} = \frac{\frac{1}{2} F J_r^T J_{\bar{s}}}{\frac{1}{2} F J_r^T J_{\bar{i}} + N_0} = \frac{F g_{s0} (1 + p_s \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_{\bar{s}})}{F g_{i0} (1 + p_i \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r) + 2N_0} = \text{SNR} \cdot \frac{1 + p_s \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_{\bar{s}}}{1 + p_i \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r + 2N_0} \quad (5)$$

在上式中, $\text{SNR} = F g_{s0} / N_0$, $K = F g_{i0} / N_0$. 最优极化的目的是根据噪声、干扰和信号的特征, 调节接收天线的参数 \mathbf{g}_r , 找到一个合适的 \mathbf{g}_{r0} 使 SINR 最优. 由于 SINR 是一与天线极化参变量 \mathbf{g}_r 无关的系数, 不影响 SINR 的最优化特征, 于是令

$$S_1 = \frac{1 + p_s \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_{\bar{s}}}{K (1 + p_i \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r) + 2} \quad (6)$$

S_1 的最优点即 SINR 的最优点, S_1 的最优值乘以 SINR 即为最优的 SINR. 因 $\|\mathbf{g}_r\| = 1$, $\|\mathbf{g}_{\bar{s}}\| = 1$, $\|\mathbf{g}_{\bar{i}}\| = 1$, $0 \leq p_s \leq 1$, $0 \leq p_i \leq 1$, 所以 $\|\mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_{\bar{s}}\| \leq 1$, $\|\mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_{\bar{i}}\| \leq 1$, 从而(6)式的分母不小于 2, 无零点, 其范围是 $[K(1 - p_i) + 2, K(1 + p_i) + 2]$, 分子的范围是 $[(1 - p_s), (1 + p_s)]$, 因而可得到 S_1 的范围如下

$$\frac{1-p_s}{K(1+p_i)+2} \leq S_1 \leq \frac{1+p_s}{K(1-p_i)+2} \quad (7)$$

因 J_s 和 J_i 为定量, (6) 式中 S_1 是 g_r 的有界连续可微函数, 其最优值必定存在, 设其为 S_0 , 则

$$\frac{1+p_s \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_r}{K(1+p_i \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_r)+2} \leq S_0 \quad (8)$$

(8) 式的最优极化解 (最优值 S_0 和相应的最优矢量 g_{r0}) (见附录 1) 为

$$S_0 = \left[B + \sqrt{B^2 - AC} \right] / A \quad (9)$$

$$\mathbf{g}_{r0} = \frac{p_s \mathbf{g}_s - S_0 K p_i \mathbf{g}_i}{S_0(2+K) - 1} \quad (10)$$

其中 $A = K^2(1-p_i^2) + 4(K+1)$, $B = 2+K - K p_s p_i \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_i$, $C = 1-p_s^2$ 最优矢量 g_{r0} 的端点 o 称为最优极化点.

2 最优点的分布特征

2.1 唯一最优点

附录 1 的求解过程说明了最优点的唯一性. 在这里, 用另外一种办法来证明. 在 (6) 式中, 假定有两个不同的最优矢量 g_{r01} 和 g_{r02} , 其相应的最优值相同且为 S_0 , 即

$$\frac{1+p_s \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01}}{2+K+K p_i \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01}} = \frac{1+p_s \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r02}}{2+K+K p_i \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r02}} = S_0. \quad (11)$$

则经整理得

$$\begin{aligned} & [p_s(2+K)\mathbf{g}_s^T - K p_i \mathbf{g}_i^T] (\mathbf{g}_{r02} - \mathbf{g}_{r01}) + \\ & K p_i p_s [(\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01})(\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r02}) - \\ & (\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r02})(\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01})] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$(p_s \mathbf{g}_s^T - S_0 K p_i \mathbf{g}_i^T) (\mathbf{g}_{r02} - \mathbf{g}_{r01}) = 0 \quad (13)$$

由于 $(\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01})(\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r02}) - (\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r02})(\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01}) = [(\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01}) \mathbf{g}_s^T - \mathbf{g}_i^T (\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01})] (\mathbf{g}_{r02} - \mathbf{g}_{r01})$, 所以 (12) 式变为

$$\{p_s(2+K)\mathbf{g}_s^T - K p_i \mathbf{g}_i^T + K p_i p_s [(\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01}) \mathbf{g}_s^T - \mathbf{g}_i^T (\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01})]\} (\mathbf{g}_{r02} - \mathbf{g}_{r01}) = 0 \quad (14)$$

据矢量乘法, 若 $AB=CB=0$, $B \neq 0$, 则 $A=\lambda C$, λ 为一实常数. 因 $g_{r02} \neq g_{r01}$, 故从 (13), (14) 式得

$$\begin{aligned} & p_s(2+K)\mathbf{g}_s - K p_i \mathbf{g}_i + \\ & K p_i p_s [(\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01}) \mathbf{g}_s - \mathbf{g}_i (\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01})] = \\ & \lambda (p_s \mathbf{g}_s - S_0 K p_i \mathbf{g}_i) \end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_s &= \frac{K p_i + K p_i p_s (\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01}) - \lambda S_0 K p_i}{p_s(2+K) + K p_i (\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01}) p_s - \lambda p_s} \mathbf{g}_i = \lambda' \mathbf{g}_i \\ \lambda' &= \frac{K p_i}{p_s} \frac{1 - \lambda S_0 + p_s \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01}}{2 - \lambda + K + K p_i \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01}}. \end{aligned} \quad (15)$$

尽管 (15) 式中存在 g_{r01} , 但 $\mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_{r01}$ 和 $\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{r01}$ 均为实数, 故 λ' 必定为实数, 这说明信号和干扰是极化相关的, 但这与通常情况不符, 因而假设前提 $g_{r02} \neq g_{r01}$ 不正确, 只能是 $g_{r02} = g_{r01}$. 另外, 当 $\mathbf{g}_s = \lambda' \mathbf{g}_i$ 时, 由于两个矢量的端点都在球面上, 所以只能是 $\mathbf{g}_s = \mathbf{g}_i$ 或 $\mathbf{g}_s = -\mathbf{g}_i$, 此时可验算得出最优矢量均为 \mathbf{g}_s . 因此, 无论 \mathbf{g}_s 与 \mathbf{g}_i 是否相关, 最优矢量和最优极化点均唯一.

2.2 最优极化弧

由 (10) 式有

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{r0} &= k_2 \mathbf{g}_s + k_3 \mathbf{g}_x \\ k_2 &= k_1 p_s, k_3 = k_1 S_0 K p_i, \mathbf{g}_x = -\mathbf{g}_i, k_1 = \\ & 1/[S_0(2+K) - 1] = 1/\|p_s \mathbf{g}_s + S_0 K p_i \mathbf{g}_x\| > 0 \end{aligned} \quad (16)$$

其中矢量 \mathbf{g}_x 为干扰的交叉极化矢量. 从 (16) 式中可以得到以下两点:

(1) 最优矢量 \mathbf{g}_{r0} 是共轭的信号矢量 \mathbf{g}_s 和交叉的干扰矢量 \mathbf{g}_x 的线性相加, 所以这三个矢量共面: 位于同一过球心的平面上.

(2) 根据矢量加法原理, 且由于 $k_1 \geq 0$, 故 $k_2 \geq 0$, $k_3 \geq 0$, 所以最优矢量 \mathbf{g}_{r0} 必位于共轭的信号矢量 \mathbf{g}_s 和交叉的干扰矢量 \mathbf{g}_x 之间, 因而在球面上, 最优极化点 o 位于点 s 和点 x 间的大圆弧上 (见图 1).

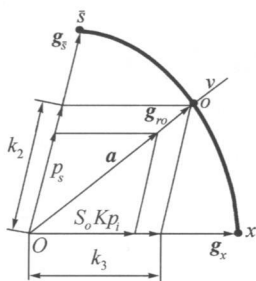


图1 最优极化矢量

图1中, $a = p_s g_{\bar{s}} + S_o K p_i g_x$, $g_{ro} = a / \|a\|$. 在由矢量 $g_{\bar{s}}$ 和 g_x 所决定的平面上, 矢量 g_{ro} 为 $k_2 g_{\bar{s}}$ 和 $k_3 g_x$ 的矢量和. 当 k_3 很大且 k_2 较小时, g_{ro} 靠近 g_x , o 点接近 x 点, 当 k_2 较大而 k_3 很小时, g_{ro} 靠近 $g_{\bar{s}}$, o 点接近 \bar{s} 点, 但无论怎样, o 点必定在 \bar{s} 点和 x 点之间.

图2为最优极化矢量和最优极化弧在极化球面

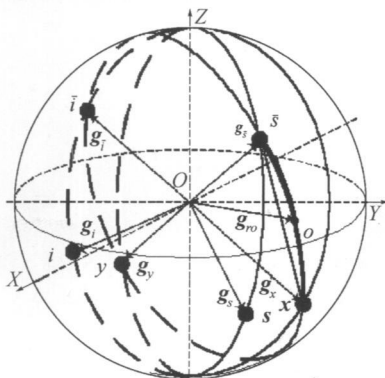


图2 最优极化弧

$$\begin{cases} 2\tau \in (0, 2\pi) \\ 2\epsilon = \tan^{-1} \left\{ \frac{(g'_{i2} g'_{s3} - g'_{s2} g'_{i3}) \cos 2\tau - (g'_{i1} g'_{s3} - g'_{s1} g'_{i3}) \sin 2\tau}{g'_{i1} g'_{s1} - g'_{s1} g'_{i2}} \right\} \end{cases} \quad (18)$$

3 最优极化滤波器的特征

3.1 信干噪比参量 S_1 的范围

(7)式给出了信干噪比参量 S_1 的范围, 而当干扰不存在即 $K=0$ 时, 有

$$0 \leq \frac{1-p_s}{2} \leq S_1 \leq \frac{1+p_s}{2} \leq 1 \quad (19)$$

上的位置关系图. 图2中, 点 s 和 i 分别为信号极化点和干扰极化点; 点 \bar{s} 和 \bar{i} 分别与点 s 和 i 共轭; 点 y 和 x 分别为 s 和 i 的交叉极化点; 点 y 和 x 分别与点 \bar{s} 和 \bar{i} 正交. 矢量 $g_s, g_i, g_{\bar{s}}, g_{\bar{i}}, g_x, g_y$ 分别与其端点 $s, i, \bar{s}, \bar{i}, y, x$ 相对应. $g_x = -g_{\bar{i}}$ 表示点 x 和 \bar{i} 是正交的. 点 o 为最优矢量 g_{ro} 的端点. 当点 s 和 i 给定后, 不论其他参数: p_s, p_i 和 K 怎么变化, 所有的最优点都位于由点 \bar{s} 和 x 所决定的大圆弧 $\widehat{\bar{s}x}$ (称其为最优极化弧, 极化弧所在的圆为最优极化大圆) 上, 且 $\angle \bar{s}Ox \leq \pi$, 或 $\widehat{\bar{s}x} \leq \pi$.

2.3 最优极化大圆方程

设信号和干扰的极化矢量分别为 $g_s^T = [g'_{s1}, g'_{s2}, g'_{s3}]$, $g_i^T = [g'_{i1}, g'_{i2}, g'_{i3}]$, 由于最优点与点 \bar{i} 和 x 均在球面上且与球心共面, 所以最优极化大圆 C_0 上任一点 $r(\xi, \zeta, \varsigma)$ 应满足如下的方程:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \xi & \zeta & \varsigma \\ -g'_{i1} & -g'_{i2} & g'_{i3} \\ g'_{s1} & g'_{s2} & -g'_{s3} \end{vmatrix} = 0 \\ \xi^2 + \zeta^2 + \varsigma^2 = 1 \end{cases} \quad (17)$$

将点 r 的极化椭圆参数 $(\cos 2\epsilon \cos 2\tau, \cos 2\epsilon \sin 2\tau, \sin 2\epsilon)$ 代入上式, 则圆 C_0 的方程为:

3.2 完全极化情况下的最优值

信号为完全极化时, $p_s=1$, (9)式中 $C=0$, 因而

$$S_o = \frac{2B}{A} = \frac{2(2+K - K p_i g_{\bar{s}}^T g_{\bar{i}})}{(2+K)^2 - K^2 p_i^2} \quad (20)$$

并且, 当干扰为完全极化时, $p_i=1$, 则

$$\begin{cases} 2\varepsilon_1 = \arcsin(c \sin(2\varepsilon_\delta - \Delta) / \cos\Delta), \\ \quad \forall \Delta, \Delta \in (-\alpha, \alpha) \\ 2\tau_1 = 2\tau_\delta \pm \arctan \cdot \\ \quad \left(\sqrt{(\cos\Delta/c)^2 - 1} / \cos(2\varepsilon_\delta - \Delta) \right) \end{cases} \quad (26)$$

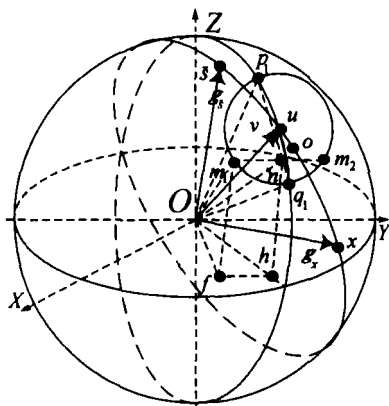


图4 球冠边圆

根据上式, 在 $(-\alpha, \alpha)$ 内任取 Δ 作为中间参数, 可求出两个解: $2\tau_{1,2} = 2\tau_\delta \pm \beta$, 其中 $\beta = \tan^{-1}(\sqrt{(\cos\Delta/c)^2 - 1} / \cos(2\varepsilon_\delta - \Delta))$, 因而边圆上相应的两个点为 $(2\varepsilon_1, 2\tau_1)$ 和 $(2\varepsilon_1, 2\tau_2)$. 但在上式的计算过程中要注意, 如果出现 $|2\varepsilon - \Delta| > \pi/2$ 或 $c < 0$ 的情况, 则都要对结果进行调整. 因为 2ε 的范围为 $(-\pi/2, \pi/2)$, 当 $|2\varepsilon - \Delta| > \pi/2$ 时, 计算的是其交叉极化点位置的坐标, 所以调整过程为将两个解的经度加 π . 由于 $\alpha = \arccos(|c|)$, 上面计算的为小球冠, 而当 $c < 0$ 时为极化球冠为大球冠, 此时大球冠和小球冠的位置相互正交, 即关于原点对称, 所以调整步骤为: $2\varepsilon'_1 = -2\varepsilon_1, 2\tau'_{1,2} = 2\tau_{1,2} + \pi$. 因此, 考虑到上述调整, (26)式变为

$$\begin{cases} 2\varepsilon_1 = \arcsin(c \sin(2\varepsilon_\delta - \Delta) / \cos\Delta), \quad \forall \Delta, \Delta \in (-\alpha, \alpha) \\ 2\tau_{1,2} = 2\tau_\delta \pm \arctan(\sqrt{(\cos\Delta/c)^2 - 1} / \cos(2\varepsilon_\delta - \Delta)) \\ 2\tau'_{1,2} = 2\tau_{1,2} + \pi \quad \text{若 } |2\varepsilon_\delta - \Delta| > \pi/2 \\ 2\varepsilon''_1 = -2\varepsilon_1, 2\tau''_{1,2} = 2\tau'_{1,2} + \pi \quad \text{若 } c < 0 \end{cases} \quad (27)$$

4 举例

给定参数如下: $g_s^T = [-0.77 \ 0.60 \ -0.19]$,

$g_x^T = [-0.53 \ -0.39 \ 0.75]$, $p_s = 0.85$, $p_i = 0.95$,

相应的极化椭圆参数为 $2\varepsilon_s = -11.23^\circ$, $2\varepsilon_i = 141.92^\circ$, $2\varepsilon_x = 48.68^\circ$, $2\tau_s = 216.10^\circ$, 信号共轭点矢量为 $g_s^T = [-0.77 \ 0.60 \ 0.19]$, 干扰交叉点矢量为 $g_x^T = [0.53 \ 0.39 \ 0.75]$. 则点 s, i, \bar{s}, \bar{i} 和 x , 以及根据(9)、(10)式计算的最优点 o , 根据(18)式画出的最优极化大圆 C_0 、根据(24)式与 $g_{r\delta} = a_\delta / \|a_\delta\|$ 计算的球冠中心点 u 和根据(27)式画出的 $\delta = 0.3, 0.6, 0.95$ 时的极化球冠见图5, 相应的极化球冠中心、角 α 和最优值及最优点坐标见表1.

表1 极化球冠的特性

| K /dB | δ | g_u | α / $^\circ$ | 最优值和最优点 | |
|---------|----------|-------|---------------------|---------|---|
| -7 | 0.30 | -0.74 | 0.63 | 0.24 | 131.33 $S_0 = 0.85$ |
| | 0.60 | -0.71 | 0.65 | 0.28 | 82.17 $g_{r_o} = [-0.66 \ 0.67 \ 0.33]$ |
| | 0.95 | -0.67 | 0.67 | 0.33 | 26.73 $2\varepsilon_o = 19.42^\circ \ 2\tau_o = 134.71^\circ$ |
| 7 | 0.30 | -0.25 | 0.72 | 0.64 | 87.39 $S_0 = 0.50$ |
| | 0.60 | 0.06 | 0.65 | 0.75 | 47.82 $g_{r_o} = [0.24 \ 0.58 \ 0.78]$ |
| | 0.95 | 0.23 | 0.58 | 0.78 | 13.25 $2\varepsilon_o = 51.28^\circ \ 2\tau_o = 66.98^\circ$ |
| 15 | 0.30 | 0.27 | 0.57 | 0.78 | 45.77 $S_0 = 0.28$ |
| | 0.60 | 0.40 | 0.49 | 0.78 | 23.68 $g_{r_o} = [0.46 \ 0.45 \ 0.77]$ |
| | 0.95 | 0.45 | 0.45 | 0.77 | 6.55 $2\varepsilon_o = 50.26^\circ \ 2\tau_o = 44.55^\circ$ |

图5(a)是以 X 轴和 Y 轴为坐标轴的 S_1 的立体图, 图5(b), (c)是 $K = -7$ dB 时极化球面最优点、最优极化大圆和极化球冠边圆的分布图, 图5(b)为主视图, 图5(c)为其俯视图. 图5(d)~(f)和图5(g)~(i)分别与图5(a)~(c)对应, 为 $K = 7$ dB, $K = 15$ dB 时的情形.

图5中, 最优点 o 、球冠中心点 u 、共轭信号点 \bar{s} 、共轭干扰点 \bar{i} 和交叉干扰点 x 均位于同一大圆 C_0 上. 最优点 o 位于圆弧 $\bar{s}x$ 上且在点 \bar{s} 和点 x 变化, 随着干扰强度的增大 (K 增大), 最优点 o 由点 \bar{s} 向点 x 靠近, 随着 K 的减小, 最优点向点 \bar{s} 靠近, 但无论 K 怎么变, 最优点 o 始终在 \bar{s} 与 x 之间 ($\bar{s}x \leq \pi$ 的一侧). 极化球冠中心点 u 始终在点 o 与点 \bar{s} 之间, 且随着通带系数 δ 的增大, 点 u 逐渐向点 o 靠近. 当 δ 很大时, 球冠较小, 当 δ 变小时, 球冠变大, 当 $\delta = 1/[S_0(2+K)]$ 时, $C=0$ 球冠为半球, 球冠边圆为大圆. 当 δ 进一步变小, 如图5(b), (c)中 $\delta = 0.3$ 时, 球冠为大球冠(球冠部分超过半球).

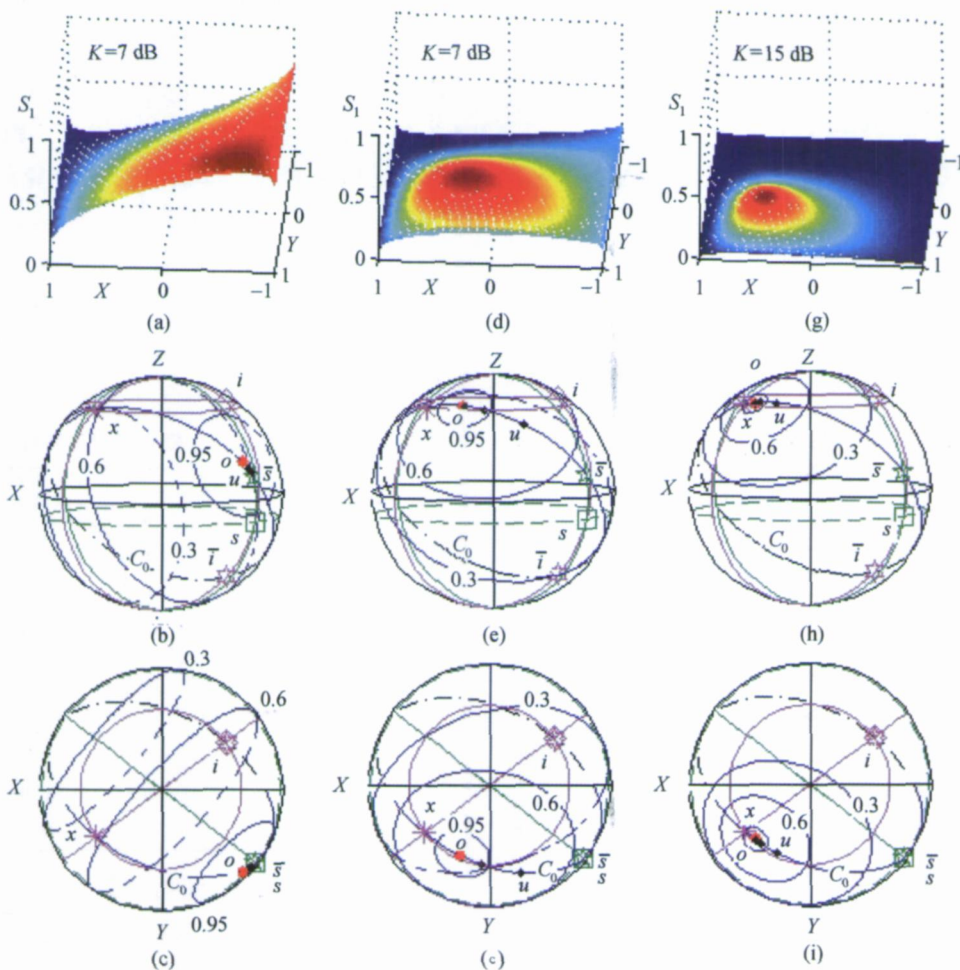


图 5 不同 K 和 δ 情况下的极化球冠边圆

5 结论

借助于矢量方法，得到了 SINR 等式的最优解（最优值和最优矢量），最优矢量是交叉的干扰矢量的线性组合。证明了最优解的唯一性，给出了信干噪比参量 S_1 的范围。详细地分析了最优极化解的特性，分别给出了最优极化弧所在的极化大圆方程和极化球冠的边圆方程，并举了例子，用图形描绘了这些特性。

最优点位于由共轭的信号点和交叉的干扰点所决定的大圆上，确切地说，当信号极化点和干扰极化点给定时，无论其他的参数如何变化，所有的最优点位于由共轭的信号点 \bar{s} 和交叉的干扰点 x 所决定的大圆弧 $\bar{s}x$ ——最优极化弧上。这也就是说，部分极化情况下的最优点仍局限于宽广的球面上的一

段圆弧上。当信号和干扰均为完全极化时，最优点当然位于该段圆弧上，这与文献[10]中的结论一致，证明过程见附录 3。

本文得到的部分极化最优解与文献[14, 15]中的最优解在形式上是一致的，仅有的一点差别是在信干噪比等式中噪声功率的定义不一样，本文用的是 N_0 ，而文献[14, 15]中用的是 $N_0/2$ ，从而在解的结构中有系数上的差别，但无本质区别，即最终的最优值相同，最优点位置一致。

所有满足 $0 \leq \delta \leq 1$ 的极化滤波器参数 g_r 的端点均位于极化球冠上，球冠的中心点与最优点并不重合，有一定偏差，但球冠始终包含了最优点。

最优点 o 、球冠中心点 u 与共轭信号点 \bar{s} ，共轭干扰点 \bar{i} 和交叉干扰点 x 均位于同一最优极大圆 C_0 上，极化球冠随着通带系数 δ 的减小而增大，当 δ 很

大时, 球冠较小, 当 $\delta=1$ (即 $c=1$) 时, 点 u 与点 o 重合, 球冠缩为一个点. 当 δ 变小时, 球冠变大, 当 $\delta=1/[S_o(2+K)]$ (即 $c=0$) 时, 球冠为半球, 球冠边圆为大圆. 当 δ 进一步变小, 球冠为大球冠 (球冠部分超过半球). 当 $\delta=\hat{\delta}$ (即 $c=-1$) 时, 点 u 与点 o 偏离最远, 离 s 点最近, 球冠为整个球面.

附录 1 (8) 式的最优解

从 (8) 式可得:

$$1 - S_o(2+K) + (p_s \mathbf{g}_s^T - S_o K p_i \mathbf{g}_i^T) \mathbf{g}_r \leq 0 \quad (28)$$

由于矢量 \mathbf{g}_r 是可调的, 根据矢量点积的定义, 当且仅当 \mathbf{g}_r 与矢量 $(p_s \mathbf{g}_s - S_o K p_i \mathbf{g}_i)$ 完全相关, 即 $\mathbf{g}_r = k_1(p_s \mathbf{g}_s - S_o K p_i \mathbf{g}_i)$ 时等号成立. 且因 $\|\mathbf{g}_r\| = 1$, 故 $k_1 = 1/\|p_s \mathbf{g}_s - S_o K p_i \mathbf{g}_i\|$, 从而有

$$\mathbf{g}_r = (p_s \mathbf{g}_s - S_o K p_i \mathbf{g}_i) / \|p_s \mathbf{g}_s - S_o K p_i \mathbf{g}_i\| \quad (29)$$

$$1 - S_o(2+K) + (p_s \mathbf{g}_s^T - S_o K p_i \mathbf{g}_i^T) \mathbf{g}_r = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \cos\varphi - \cos\alpha &= \frac{\mathbf{a}_o^T p_s \mathbf{g}_s + S_o K p_i \mathbf{g}_i}{\|\mathbf{a}_o\| S_o(2+K) - 1} - \frac{\delta S_o(2+K) - 1}{\|\mathbf{a}_o\|} \\ &= \frac{(p_s \mathbf{g}_s + \delta S_o K p_i \mathbf{g}_i)(p_s \mathbf{g}_s + S_o K p_i \mathbf{g}_i) - [\delta S_o(2+K) - 1][S_o(2+K) - 1]}{\|\mathbf{a}_o\| [S_o(2+K) - 1]} \\ &= \frac{-\delta K^2(1-p_i^2) + 4(K+1)S_o^2 + (1+\delta)[2+K+Kp_i p_s \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_i]S_o - (1-p_s^2)}{\|\mathbf{a}_o\| [S_o(2+K) - 1]} \\ &= \frac{-\delta AS_o^2 + (1+\delta)BS_o - C}{\|\mathbf{a}_o\| [S_o(2+K) - 1]} \end{aligned}$$

由于 $AS_o^2 - 2BS_o + C = 0$, 所以 $-C = AS_o^2 - 2BS_o$, 代入上式可得

$$\begin{aligned} \cos\varphi - \cos\alpha &= \frac{(1-\delta)(AS_o - B)}{\|\mathbf{a}_o\| [S_o(2+K) - 1]} S_o = \\ &= \frac{(1-\delta)\sqrt{B^2 - AC}}{\|\mathbf{a}_o\| [S_o(2+K) - 1]} S_o \geq 0. \end{aligned}$$

因为 φ 和 α 均在 $[0, \pi]$, 所以 $\varphi \leq \alpha$.

附录 3 最优点位置的一致性

当信号和干扰均为完全极化时, $p_s = 1, p_i = 1$, 则最优

$$\begin{aligned} \cos\theta_s &= \mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}_o \\ &= \mathbf{g}_s \cdot \frac{(1+K)\mathbf{g}_s - \left[\frac{1}{2}K(1-\cos\alpha) + 1\right]K\mathbf{g}_i}{1+K - K\cos\alpha - \frac{1}{2}K^2\cos\alpha + \frac{1}{2}K^2} = \frac{(1+K)\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}_s - \left[\frac{1}{2}K(1-\cos\alpha) + 1\right]K\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}_i}{1+K - K\cos\alpha - \frac{1}{2}K^2\cos\alpha + \frac{1}{2}K^2} \end{aligned}$$

将 (29) 式代入 (30) 式可得

$$1 - S_o(2+K) + \|p_s \mathbf{g}_s - S_o K p_i \mathbf{g}_i\| = 0 \quad (31)$$

将上式移项后两边平方并整理得到一个二次方程, 且可解得最优值和最优矢量为

$$S_o = \left[B + \sqrt{B^2 - AC} \right] / A \quad (32)$$

$$\mathbf{g}_o = \frac{p_s \mathbf{g}_s - S_o K p_i \mathbf{g}_i}{S_o(2+K) - 1} \quad (33)$$

$$A = K^2(1-p_i^2) + 4(K+1)$$

$$B = 2+K - Kp_i p_s \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_i, \quad C = 1-p_s^2.$$

附录 2 极化球冠中心点 u 位于 \bar{s} 与 o 之间的证明

由 (24) 式有 $\cos\alpha = [\delta S_o(2+K) - 1] / \|\mathbf{a}_o\|$, $\mathbf{a}_o = p_s \mathbf{g}_s + \delta S_o K p_i \mathbf{g}_i$, 而 $\cos\varphi = \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_o = \mathbf{a}_o^T \mathbf{g}_r / \|\mathbf{a}_o\|$, 因而

值和最优矢量分别为

$$S_o = \frac{\frac{1}{2}K(1-\cos\alpha) + 1}{K+1}$$

$$\mathbf{g}_o = \frac{\mathbf{g}_s - S_o K \mathbf{g}_i}{S_o(2+K) - 1} =$$

$$\frac{(1+K)\mathbf{g}_s - \left[\frac{1}{2}K(1-\cos\alpha) + 1\right]K\mathbf{g}_i}{1+K - K\cos\alpha - \frac{1}{2}K^2\cos\alpha + \frac{1}{2}K^2}$$

其中, 角 α 为信号极化点和干扰极化点之间的夹角. 最优点与信号极化点之间的夹角 θ_s 满足

$$= \frac{(1+K) - \left[\frac{1}{2}K(1 - \cos\alpha) + 1 \right] K \cos\alpha}{1+K - K \cos\alpha - \frac{1}{2}K^2 \cos\alpha + \frac{1}{2}K^2} = \frac{1+K - K \cos\alpha - \frac{1}{2}K^2 \cos\alpha + \frac{1}{2}K^2 \cos^2\alpha}{1+K - K \cos\alpha - \frac{1}{2}K^2 \cos\alpha + \frac{1}{2}K^2}$$

在文献 [10] 中, 夹角 θ_s 满足

$$\tan \frac{\theta_s}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \frac{2}{K} - \cos\alpha}, \quad e = 1 + \frac{2}{K} - \cos\alpha$$

因而可推出

$$\begin{aligned} \tan\theta_s &= \frac{2 \tan \frac{\theta_s}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta_s}{2}} = \frac{2e \sin\alpha}{e^2 - \sin^2\alpha} \\ \cos\theta_s &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta_s}} = \frac{e^2 - \sin^2\alpha}{e^2 + \sin^2\alpha} \\ &= \frac{1+K - K \cos\alpha - \frac{1}{2}K^2 \cos\alpha + \frac{1}{2}K^2 \cos^2\alpha}{1+K - K \cos\alpha - \frac{1}{2}K^2 \cos\alpha + \frac{1}{2}K^2} \end{aligned}$$

从上可看出, 在完全极化情况下, 本文的最优点位置与 Stapor 所获得的结果是一样的: 两者都位于由信号极化点和干扰极化点所决定的大圆上, 且与信号极化点所夹的球心角为 θ_s .

参 考 文 献

- Giuli D. Polarization diversity in radars. Proc IEEE, 1986, 74 (2): 245-269
- Boerner WM, Yan WL, Xi AQ, et al. On the basic principles of radar polarimetry: The target characteristic polarization state theory of Kennaugh, Huyner's polarization fork concept, and its extension to the partially polarized case. Proc IEEE, 1991, 79 (10): 1538-1550
- Deschamps G, Mast P. Poincare sphere representation of partially polarized fields. IEEE Trans Antennas and Propagation, 1973, 21(4): 474-478
- van Zyl JJ, Papas CH. On the optimum polarizations of incoherently reflected waves. IEEE Trans Antennas Propagation, 1987, 35(7): 818-825
- Czyz ZH. Coherent and noncoherent polarimetric radar receivers

completely canceling the partially polarized clutter. Microwaves and Radar, 1998. MIKON '98, 12th International Conference, 1998, 1: 128-132

- McCormick GC. The theory of polarization diversity systems: The partially polarized case. IEEE Trans Antennas and Propagation, 1996, 44(4): 425-433
- Poelman AJ, Guy JRF. Multinotch logic product polarisation suppression filters: A typical design example and its performance in a rain clutter environment. IEE Proc F, Commun, Radar & Signal Process, 1984, 131(4): 383-396
- Poelman AJ, Hilgers CJ. Effectiveness of multinotch logic product polarisation filters in radar for countering rain clutter. Radar and Signal Processing, IEE Proc F, 1991, 138(5): 427-437
- Gherardelli M. Adaptive polarisation suppression of intentional radar disturbance. Radar and Signal Processing, IEE Proc F, 1990, 137(6): 407-417
- Stapor DP. Optimal receive antenna polarization in the presence of interference and noise. IEEE Trans Antennas and Propagation, 1995, 43(5): 473-477
- 王雪松, 庄钊文, 肖顺平, 等. 极化信号的优化接收理论: 完全极化情形. 电子学报, 1998, 26(6): 42-46
- Yang YF, Tao R, Wang Y. A new SINR equation based on the polarization ellipse parameters. IEEE Trans Antennas and Propagation, 2005, 53(4): 1571-1577
- 王雪松, 徐振海, 代大海, 等. 干扰环境中部分极化信号的最佳滤波. 电子与信息学报, 2004, 26(4): 593-597
- 王雪松, 肖顺平, 陈志杰, 等. 部分极化情况下 SINR 极化滤波器性能研究. 应用科学学报, 1999, 17(2): 177-182
- 徐振海, 王雪松, 施龙飞, 等. 信号最优极化滤波及性能分析. 电子与信息学报, 2006, 28(3): 498-501
- 王雪松, 代大海, 徐振海, 等. 极化滤波器的性能评估与选择. 自然科学进展, 2004, 14(4): 442-448
- Guissard A. Mueller and Kennaugh matrices in radar polarimetry. IEEE Trans Geoscience and Remote Sensing, 1994, 32(3): 590-597